GEODEZINĖS KREIVĖS

Geodezinės kreivės kraštinis uždavinys

Per 2 paviršiaus taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ galima pravesti be galo daug kreivių priklausančių paviršiui. Ta iš jų, kurios ilgis mažiausias vadinama paviršiaus *geodezine* kreive.

Tarkime, kad paviršiaus lygtis $z = z(x, y)$, tada geodezinę kreivę γ, jungiančią taškus M_1 ir M_2 rasime išsprendę variacinį uždavinį

$$\min_{\gamma} \int_{\gamma} ds = \min_{y(x)} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + {y'_x}^2(x) + {z'_x}^2(x, y(x))}\, dx\,, \tag{1}$$

čia ds kreivės γ lanko ilgio diferencialas, $y = y(x)$ –kreivės γ projekcijos į Oxy plokštumą lygtis. Atlikę atitinkamus pertvarkymus, rasime šio variacinio uždavinio Eulerio lygtį

$$y'' = \frac{\left(y'p - q\right)\left(ty'^2 + 2sy' + r\right)}{1 + p^2 + q^2},$$

čia $p = \dfrac{\partial z(x, y(x))}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z(x, y(x))}{\partial y}$, $r = \dfrac{\partial^2 z(x, y(x))}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 z(x, y(x))}{\partial x \partial y}$ $t = \dfrac{\partial^2 z(x, y(x))}{\partial y^2}$.

Todėl išsprendę kraštinį uždavinį

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{\left(y'p - q\right)\left(ty'^2 + 2sy' + r\right)}{1 + p^2 + q^2}, \\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

rasime funkciją $y = y(x)$ ir geodezinės kreivės parametrines lygtis:

$$\gamma : \begin{cases} x = x, \\ y = y(x), & x : x_1 \le x \le x_2 \\ z = z(x, y(x)). \end{cases}$$

Pavyzdžiai

Pavyzdys 1. Rasti paviršiaus $z=\frac{xy^2}{10}+20$ geodezinę kreivę, jungiančią taškus $M_1(-12;4;0,8)$, $M_2(3;2;21,2)$.

Sprendimas. Apskaičiavę

$$p=\frac{\partial z(x,y(x))}{\partial x}=\frac{y(x)^2}{10},\ q=\frac{\partial z(x,y(x))}{\partial y}=\frac{xy(x)}{5},$$
$$r=\frac{\partial^2 z(x,y(x))}{\partial x^2}=0\ s=\frac{\partial^2 z(x,y(x))}{\partial x\partial y}=\frac{y(x)}{5},\ t=\frac{\partial^2 z(x,y(x))}{\partial y^2}=\frac{x}{5}$$

gauname funkcijai $y=y(x)$ kraštinį uždavinį:

$$\begin{cases} y''=\dfrac{2yy'\left(2y+xy'\right)\left(yy'-2x\right)}{100+4x^2y^2+y^4}, \\ y(-12)=4,\ y(3)=2 \end{cases}$$

Jį sprendžiame skaitmeniniu būdu pasitelkiant paketą *Maple* (**DL –** kraštinio uždavinio diferencialinė lygtis aprašyta *Maple* sintakse):

```
> sp:=dsolve({DL,y(-12)=4,y(3)=2},{y(x)},numeric);
```

sp := proc (*x_bvp*) ... end proc

Dabar galime apskaičiuoti sprendinio reikšmę ir jo išvestinę bet kuriame intervalo $x\in[-12;2]$ taške, pvz., kai $x=-2$

```
> sp(-2);
```

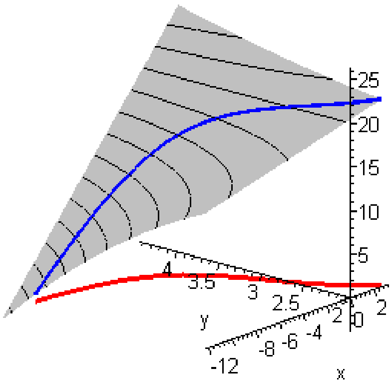
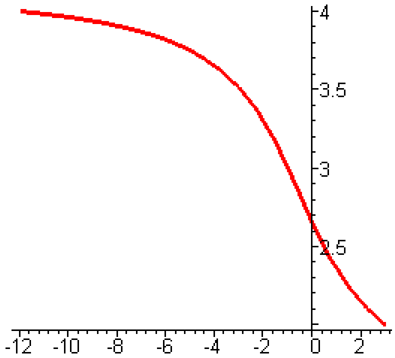
$$\left[x = \text{-2.},\ \mathrm{y}(x) = 3.30815016841005427,\ \frac{d}{dx}\mathrm{y}(x) = \text{-0.253066424539676649}\right]$$

Be to, rasime ir geodezinės kreivės taškų koordinates:

```
> z:=(x,y)->x*y^2/10+20:
> rhs(sp(-2)[1]),rhs(sp(-2)[2]),z(rhs(sp(-2)[1]),rhs(sp(-2)[2]));
```

-2., 3.30815016841005427, 17.81122849

Grafiškai atvaizduojame paviršių, geodezinę kreivę ir jos projekciją Oxy plokštumoje:

	
Paviršius $z = \dfrac{xy^2}{10} + 20$ ir jo geodezinė kreivė	Geodezinės kreivės projekcija Oxy plokštumoje

Pavyzdys 2. Cilindrinių paviršių geodezinės kreivės

Kai cilindrinio paviršiaus vedančioji kreivė nusakoma lygtimis

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

tai geodezinę kreivę jungiančią taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ rasime išsprendę variacinį uždavinį:

$$\begin{cases} \min\limits_{z(t)} \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt, \\ z(t_1) = z_1, \;\; z(t_2) = z_2 \end{cases}$$

kurio Eulerio lygtis

$$z''w - z'w' = 0,$$

čia $w = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ – yra žinoma funkcija. Šios lygties bendrąjį sprendinį galima išreikšti integralu

$$z(t) = c_1 + c_2 \int w(t)\, dt\, .$$

Todėl geodezinės kreivės, jungiančios taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, parametrinės lygtys

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\dfrac{\int_{t_1}^{t} w(\tau)\,d\tau}{\int_{t_1}^{t_2} w(\tau)\,d\tau}, \end{cases}$$

čia rėžiai t_i turi tenkinti sąlygas $x(t_i) = x_i,\ y(t_i) = y_i,\ i = 1,2$.

Skritulinio cilindro atveju $\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \sin(t), \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1} \end{cases}$ (sraigtinė linija)

Elipsinio cilindro atveju $\begin{cases} x = a\cos(t), \\ y = b\sin(t), \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\dfrac{\psi(t) - \psi(t_1)}{\psi(t_2) - \psi(t_1)} \end{cases}$

čia $\psi(t) = -aE\left(\cos(t), \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right), E -$ II tipo elipsinis intgralas.

Parabolinio cilindro atveju $\begin{cases} x = t, \\ y = ct^2, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\dfrac{\psi(t) - \psi(t_1)}{\psi(t_2) - \psi(t_1)}, \end{cases}$

čia $\psi(t) = \dfrac{1}{4c}\left(2ct\sqrt{1 + 4c^2t^2} + \operatorname{arcsinh}(2ct)\right)$.

Hiperbolinio cilindro atveju $\begin{cases} x = \cosh t, \\ y = \sinh t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\dfrac{\psi(t) - \psi(t_1)}{\psi(t_2) - \psi(t_1)}, \end{cases}$

čia $\psi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Pi\left(\dfrac{e^{2t} - 1}{\sqrt{e^{4t} + 1}}, 1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, Π – III tipo elipsinis intgralas.

Pavyzdys 3. Kūgio $z=\sqrt{x^2+y^2}$ geodezinės kreivės.

Cilindrinėje koordinačių sistemoje kūginio paviršiaus lygtis $z=\rho$, o šio paviršiaus kreivės lanko ilgio diferencialo kvadratas

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2=(2\rho'^2+\rho^2)\,d\varphi^2,$$

todėl jos lanko ilgis

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{2\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi\,.$$

Šio integralo minimumo Eulerio lygtis

$$\rho^2+4\rho'^2-2\rho\rho''=0\,,$$

o jos sprendinys, tenkinantis sąlygas $\rho(\varphi_1)=z_1,\ \rho(\varphi_2)=z_2$

$$\rho(\varphi)=\frac{z_1 z_2\sin\left(\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{\sqrt{2}}\right)}{z_1\sin\left(\dfrac{\varphi-\varphi_1}{\sqrt{2}}\right)+z_2\sin\left(\dfrac{\varphi_2-\varphi}{\sqrt{2}}\right)}\,.$$

Tuo nesunku įsitikinti Eulerio lygtyje pakeitus $\rho=\dfrac{1}{r}$ – gauname antros eilės lygtį su pastoviais koeficientais.

Tuo būdu, kūgio $z=\sqrt{x^2+y^2}$ geodezinės kreivės parametrinės lygtys cilindrinėje koordinačių sistemoje

$$\begin{cases}\rho(\varphi)=\dfrac{z_1 z_2\sin\left(\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{\sqrt{2}}\right)}{z_1\sin\left(\dfrac{\varphi-\varphi_1}{\sqrt{2}}\right)+z_2\sin\left(\dfrac{\varphi_2-\varphi}{\sqrt{2}}\right)}, & \qquad \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\\ z=\rho(\varphi). & \end{cases}$$